

Н. В. Вандина, В. А. Козлов, Л. Ж. Паланджянц

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СТВОРЕ РЕКИ КУБАНЬ

Аннотация. Изучается дифференциальное уравнение Риккати, возникшее из системы уравнений Сен-Венана, описывающей движение воды в открытых руслах. Исследуемое уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка, и затем применяются методы теории мультипликативного интеграла. Проведено качественное исследование поведения интегральных кривых. Численные методы подтверждают полученные результаты.

Ключевые слова: система уравнений Сен-Венана, уравнение Риккати, фундаментальная матрица, качественное исследование, численные методы.

Abstract. Riccati equation which has arisen from Saint-Venant equation system describing fluid motion in open channels is considered. The investigated equation is reduced to linear differential second-order equation, and then the methods of the theory of multiply integral are applied. The qualitative behavioral research of integral curves is constructed. Numerical methods confirm the received results.

Keywords: Saint-Venant equation system, Riccati equation, fundamental matrix, qualitative investigation, numerical methods.

Построение и изучение математических моделей, позволяющих осуществить расчет и прогноз характеристик речного стока, является одной из важных задач гидравлики открытых потоков. При этом движение жидкости в общем случае является неустановившимся и характеризуется изменением во времени параметров потока в любом створе русла.

Неустановившееся движение воды в открытых руслах описывается системой уравнений Сен-Венана, представляющей собой объединение уравнения динамического равновесия и уравнения неразрывности для потока движущейся жидкости [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial l} = j - \frac{v^2 n^2}{h^{4/3}}, \\ v \frac{\partial h}{\partial l} + h \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

где t – время; l – пространственная координата, ориентированная по направлению движения; j – уклон дна русла; g – ускорение свободного падения; n – коэффициент шероховатости; $v(l, t)$ – средняя по сечению скорость потока; $h(l, t)$ – глубина русла.

Рассмотрим данную систему применительно к створу реки, т.е. будем считать $\frac{\partial h}{\partial l} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial l} = 0$. При заданных условиях система уравнений Сен-Венана в частных производных приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в полных производных

$$\frac{dv}{dt} = gj - \frac{gv^2 n^2}{h^{4/3}},$$

которое представляет собой математическую модель неустановившегося движения воды в гидрометрическом створе реки и является уравнением Риккати.

При установившемся движении глубина потока неизменна ($h = \text{const}$) в любой момент времени t . В этом случае общее решение данного уравнения выражается в элементарных функциях с помощью разделения переменных и имеет вид

$$v = \frac{1}{n} \sqrt{j h^3} th \left(ngh^{\frac{2}{3}} \sqrt{j} (t + C) \right),$$

где C – произвольная постоянная.

Частное решение $v = v(t)$ может быть получено при заданном начальном условии $v = v_0$ при $t = t_0$.

Рассмотрим створ реки Кубань в районе города Армавира. Коэффициент шероховатости n был найден по справочным таблицам, уклон j определен путем продольного нивелирования русла реки и представления эмпирической зависимости высоты русла над уровнем моря от длины реки с последующим ее дифференцированием [3], средняя глубина потока в периоды между паводками известна по данным измерений ($n = 0,043, j = 0,00113, h = 2,6801$ м).

При стационарном движении уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = 0,011082 - \frac{0,01839v^2}{(2,6801)^{4/3}}.$$

При заданном начальном условии $v(0) = 1,4969$ решением уравнения является функция

$$v(t) = 1,5084 \cdot th(0,0073t + 2,777),$$

графическая интерпретация которой представлена на рис. 1.

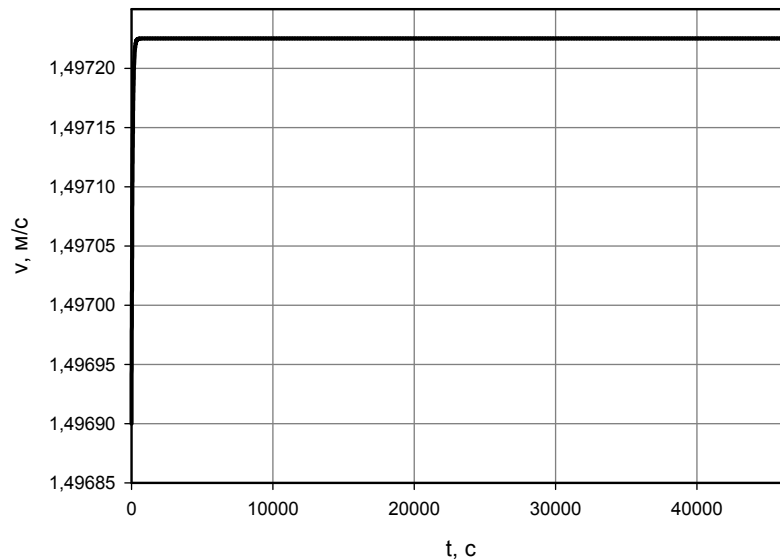


Рис. 1. График скорости установившегося движения жидкости

Качественная картина поведения решений с произвольными начальными данными представлена на рис. 2.

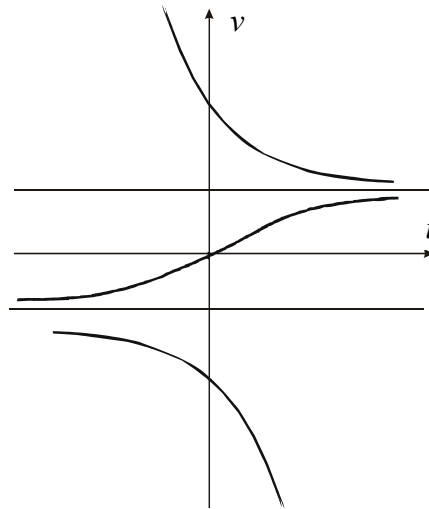


Рис. 2. Качественная картина поведения решений уравнения при установившемся движении жидкости

Наибольший интерес представляет случай неустановившегося движения, т.е. когда глубина h является функцией времени t .

Тогда уравнение Риккати запишется в виде

$$\frac{dv}{dt} = gj - \frac{gv^2 n^2}{h(t)^{4/3}}.$$

Мы рассматриваем створ реки Кубань в районе города Армавира. Функция $h(t)$ была найдена по результатам аппроксимации экспериментальных данных, полученных при прохождении паводковой волны в Управлении по делам ГО и ЧС, с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9013$.

Математическая модель нестационарного движения жидкости в данном створе описывается дифференциальным уравнением при начальном условии $v(0) = 1,4969$:

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{b}{c(t)} v^2, \quad (1)$$

где $a = 0,011074$, $b = 0,01568$, $c(t) = (-5,314 \cdot 10^{-9} t^2 + 0,00019 \cdot t + 2,6569)^{4/3}$.

Решение этого уравнения является главной целью нашего исследования.

Сведем уравнение (1) к линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Замена $z = \frac{1}{v}$ приводит уравнение (1) к виду

$$z' + az^2 = \frac{b}{c(t)}. \quad (2)$$

Сделаем замену: $z = \frac{\varphi'}{a\varphi}$, $z' = \frac{\varphi''}{a\varphi} - \frac{(\varphi')^2}{a\varphi^2}$. Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{\varphi''}{a\varphi} - \frac{(\varphi')^2}{a\varphi^2} + a \cdot \frac{(\varphi')^2}{a^2\varphi^2} = \frac{b}{c(t)}$$

или

$$\varphi'' = \frac{ab}{c(t)} \varphi. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение (1) с помощью замены $v = \frac{a\varphi}{\varphi'}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (3).

Введем обозначения: $a_2 = -5,314 \cdot 10^{-9}$, $a_1 = 0,00019$, $a_0 = 2,6569$.

Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$\varphi'' = \frac{ab}{(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)^{\frac{4}{3}}} \varphi.$$

Найдем начальные условия. Из соотношения $v = \frac{a\varphi}{\varphi'}$ следует, что $v(0) = \frac{a\varphi(0)}{\varphi'(0)}$, откуда в качестве начальных условий на решение φ можно взять следующие условия:

$$\varphi(0) = v(0), \quad \varphi'(0) = a.$$

Введем обозначение:

$$u = \frac{ab}{(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)^{\frac{4}{3}}}. \quad (4)$$

Запишем уравнение (3) в виде системы с учетом обозначения (4):

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Запишем решение системы (5) с помощью фундаментальной матрицы Φ :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\varphi_0 = \varphi(0) = v(0)$, $y_0 = \varphi'(0) = a$.

Фундаментальная матрица линейной системы (6) (матрицант, или мультипликативный интеграл) имеет следующее дифференциальное представление (см., например, [4, с. 40]):

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \begin{pmatrix} y_{2k+1} & y_{2k-1} \\ y_{2k+2} & y_{2k} \end{pmatrix} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (7)$$

Отметим, что в общем случае имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ y_{2k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix}'.$$

Таким образом, получаем последовательность $y_s, s = 1, 2, \dots$:

$$0, 1, 1, 0, 0, u, u, u', -u', -2u', u'' + u^2, 3u'' + u^2, -u''' - 4uu', -4u''' - 6uu' \dots$$

Вычисления показывают, что имеет место равенство

$$u' = -\frac{4}{3} \frac{2a_2 t + a_1}{a_2 t^2 + a_1 t + a_0} \cdot u.$$

Это обстоятельство позволяет упростить ряд (7), поскольку производные от функции u можно заменить через функцию u .

Для удобства дифференцирования введем обозначение:

$$f = -\frac{4}{3} \frac{2a_2 t + a_1}{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}.$$

Тогда $u' = f \cdot u$, $u'' = (f' + f^2) \cdot u$, $u''' = (f'' + 3ff' + f^3) \cdot u$, ..., где все производные будут рациональными функциями от t .

Подставив эти производные в равенство (7), после некоторых преобразований для фундаментальной матрицы $\Phi = (\Phi_{ij}), i, j = 1, 2$, получаем ряд по степеням t , коэффициенты которого зависят от $u(t)$.

Следовательно, частное решение уравнения (1) представляется в следующем виде:

$$v(t) = \frac{a \cdot (\Phi_{11} \cdot v(0) + \Phi_{12} \cdot a)}{\Phi_{21} \cdot v(0) + \Phi_{22} \cdot a}.$$

Действительно, $\Phi_{11}(0) = 1$, $\Phi_{12}(0) = 0$, $\Phi_{21}(0) = 0$, $\Phi_{22}(0) = 1$,

$$v(0) = \frac{a \cdot (1 \cdot v(0) + 0 \cdot a)}{0 \cdot v(0) + 1 \cdot a} = \frac{a \cdot v(0)}{a} = v(0).$$

При построении графика решения с данными начальными условиями необходимо учесть то обстоятельство, что в зависимости от степени приближения знаменатель дроби может обратиться в нуль. Поэтому целесообразно построить график решения на некотором интервале вблизи начальных условий.

Проведем качественное исследование решений уравнения (1) (см., например, [5, с. 65–80]). Запишем уравнение (1) в виде

$$v' = -\frac{b}{c} \left(v - \sqrt{\frac{ac}{b}} \right) \cdot \left(v + \sqrt{\frac{ac}{b}} \right).$$

Найдем функции, при которых производная решений обращается в нуль:

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \left(a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \right)^{2/3}. \quad (8)$$

Область определения функций (8) представляет собой интервал, заключенный между корнями уравнения:

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0.$$

Нетрудно посчитать, что $t \in (t_1, t_2)$, где $t_1 \approx -1,075 \cdot 10^4$, $t_2 \approx 4,660 \cdot 10^4$. За этим интервалом функции (8) не определены. На концах отрезка $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) = 0$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Имеют место неравенства:

$$0 < \alpha_1 \leq m_1, -m_1 \leq \alpha_2 < 0.$$

Кривые α_1 и α_2 достигают экстремума в точках с абсциссами $t_{\max} = -\frac{a_1}{2a_2} \approx 1,787 \cdot 10^4$. При этом $m_1 = \max \alpha_1 \approx 1,6$ и $-m_1 = \min \alpha_2 \approx -1,6$.

Область допустимых решений разбивается кривыми α_1 и α_2 на три области, внутри которых решение является монотонной функцией.

Поведение решений определим по знаку производной:

$$\alpha_1 < v, v' < 0, v(t) \text{ — убывает на } (t_1, t_2);$$

$$\alpha_2 < v < \alpha_1, v' > 0, v(t) \text{ — возрастает на } (t_1, t_2);$$

$$v < \alpha_2, v' < 0, v(t) \text{ — убывает на } (t_1, t_2).$$

Для нахождения точек перегиба вторую производную решений приравняем нулю:

$$v'' = \frac{2b^2}{c^2} v \cdot \left(v + \frac{c'}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{c'^2 + 16ac} \right) \left(v + \frac{c'}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{c'^2 + 16ac} \right) = 0.$$

$$\text{Обозначим } \beta_1 = -\frac{c'}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{c'^2 + 16ac}, \beta_2 = -\frac{c'}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{c'^2 + 16ac}.$$

$$\text{Отметим, что } \beta_1(t_1) = \beta_1(t_2) = 0, \beta_2(t_1) = \beta_2(t_2) = 0.$$

Кривые $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ разбивают область допустимых значений решений на пять областей, в каждой из которых можно установить монотонность и выпуклость решений уравнения:

- 1) $\beta_1 < v$;
- 2) $\alpha_1 < v \leq \beta_1$;
- 3) $\alpha_2 < v \leq \alpha_1$;
- 4) $\beta_2 < v \leq \alpha_2$;
- 5) $v \leq \beta_2$.

На рис. 3 кривые $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ изображены пунктирными линиями.

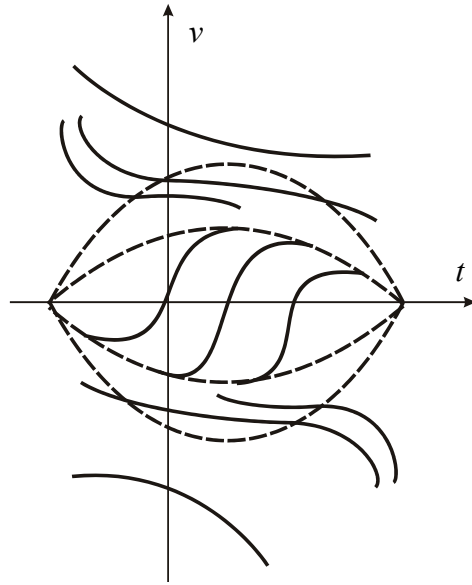


Рис. 3. Качественная картина поведения решений

1. Рассмотрим решение $v(t)$ уравнения (1) при условии $v(t_0) = m_0 > \beta_1(t)$ при $t > t_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – малое число. Рассмотрим интервал $(t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon)$. Обозначим $\delta_1(\varepsilon) = \alpha_1(t_1 + \varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon) = \alpha_1(t_2 - \varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Тогда имеет место оценка: $\alpha_1(t) \geq \delta(\varepsilon) > 0$ при $t \in (t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon)$.

С учетом того, что $\alpha_2 \geq -m_1$, получаем

$$0 < v - \alpha_1 \leq v - \delta \text{ и } 0 < v - \alpha_2 \leq v + m_1,$$

откуда следует, что

$$(v - \alpha_1)(v - \alpha_2) \leq (v - \delta)(v + m_1),$$

и, следовательно,

$$-\frac{b}{c}(v - \alpha_1)(v - \alpha_2) \geq -\frac{b}{c}(v - \delta)(v + m_1).$$

Таким образом, если $\bar{v} = \bar{v}(t)$ – решение уравнения

$$\bar{v}' = -\frac{b}{c}(\bar{v} - \delta)(\bar{v} + m_1), \quad \bar{v}(t_0) = M_0, \quad (9)$$

то будет $v'(t) \geq \bar{v}'(t)$, и, следовательно, при $t > t_0$ имеем $v(t) \geq \bar{v}(t)$.

Но из уравнения (9) находим

$$\bar{v} = \left(\delta + m_1 \exp \left(-(m_1 + \delta)b \int \frac{dt}{c(t)} \right) \right) \left(1 - \exp \left(-(m_1 + \delta)b \int \frac{dt}{c(t)} \right) \right)^{-1}.$$

Оценим решение $\bar{v}(t)$ с таким расчетом, чтобы не нарушить неравенство $v(t) \geq \bar{v}(t)$.

Имеет место оценка: $c(t) \leq \max c(t) = c_{\max} > 0$ при $t \in (t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon)$.

Следовательно, $\int \frac{dt}{c(t)} \geq \frac{1}{c_{\max}} \cdot (t - t_0)$, откуда после некоторых преобразований получаем следующую оценку для функции $\bar{v}(t)$:

$$\bar{v} \geq \left(\delta + m_1 \exp \left(-\frac{(m_1 + \delta)b}{c_{\max}} (t - t_0) \right) \right) \left(1 - \exp \left(\left(-\frac{(m_1 + \delta)b}{c_{\max}} (t - t_0) \right) \right) \right)^{-1}.$$

Так как правая часть последнего неравенства стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow t_0$, то и $\bar{v} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0$, и, следовательно, $v \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0$; и так как правая часть последнего неравенства стремится к δ при $t \rightarrow t_0$, то $\bar{v} \rightarrow \bar{m}$ при $t \rightarrow t_0$, где $\bar{m} > \delta$, и, следовательно, $v \rightarrow m > \bar{m}$ при $t \rightarrow t_0$.

2. Рассмотрим решение $v(t)$ уравнения (1) при условии $\alpha_1 < v(t) \leq \beta_1$, $v(t_0) = m_0$, где $\alpha_1 < m_0 \leq \beta_1$ при $t > t_0$. В данной области решения остаются монотонно убывающими, но меняют выпуклость на кривой $\beta_1(t)$. В дальнейшем семейство этих решений разделяется на два подсемейства в зависимости от того, пересекают ли интегральные кривые кривую $\beta_1(t)$ один раз или два раза. В первом случае интегральные кривые стремятся к нулю, а во втором случае – к некоторой постоянной.

3. Внутри области $\alpha_2 \leq v \leq \alpha_1$ интегральные кривые возрастают и на границах области достигают экстремумов. Учитывая знаки второй производной, выясняем, что на кривой α_1 достигаются максимумы, а на кривой α_2 – минимумы. При входе и после выхода из области $\alpha_2 \leq v \leq \alpha_1$ интегральные кривые монотонно убывают.

Отметим, что численные расчеты, проведенные для уравнения (1) с начальными данными из этой области, подтверждают поведение решений.

Случаи 4 и 5 аналогичны случаям 1 и 2.

Таким образом, качественная картина поведения решений уравнения (1) приведена на рис. 3.

Список литературы

1. **Штеренлихт, Д. В.** Гидравлика / Д. В. Штеренлихт. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
2. **Грушевский, М. С.** Неустановившееся движение воды в реках и каналах / М. С. Грушевский. – Л. : Гидрометеиздат, 1982. – 288 с.
3. **Семенчин, Е. А.** Метод расчета параметров потока на основе решения системы дифференциальных уравнений, описывающей нестационарное движение воды в русле реки / Е. А. Семенчин, Н. В. Вандина // Экологические системы и приборы. – 2009. – № 4. – С. 16–20.
4. **Паланджянц, Л. Ж.** Геометрия мультипликативного интеграла / Л. Ж. Паланджянц. – Майкоп : Качество, 1997. – 94 с.
5. **Еругин, Н. П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1972. – 664 с.

Вандина Наталья Валерьевнааспирант, Ставропольский
государственный университет

E-mail: vandina-n-v@rambler.ru

Vandina Natalya ValeryevnaPostgraduate student,
Stavropol State University**Козлов Владимир Анатольевич**кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой
математического анализа, Армавирский
государственный педагогический
университет

E-mail: shagin196@yandex.ru

Kozlov Vladimir AnatolyevichCandidate of physico-mathematical
sciences, associate professor, head
of sub-department of mathematical analysis,
Armavir State Pedagogical University**Паланджянц Левон Жирайрович**кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра высшей математики
и системного анализа, Майкопский
государственный технологический
университет

E-mail: levonmgtu@rambler.ru

Palandzhyants Levon ZhirayrovichCandidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of higher mathematics
and system analysis, Maykop State
Technological University

УДК 532.5.013**Вандина, Н. В.****О математической модели нестационарного движения воды в створе реки Кубань** / Н. В. Вандина, В. А. Козлов, Л. Ж. Паланджянц // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 43–51.